الفصل الثاني
٢-١ مقدمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

والآن:

- أنظم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على عناصر صفوف أو أعمدة مصفوفة لتحليل البيانات.

المفردات:

المصفوفة matrix
العنصر element
الرتبة order
مصفوفة الصف row matrix
مصفوفة العمود column matrix
المصفوفة المربعة square matrix
المصفوفة الصفرية zero matrix
المصفوفات المتساوية equal matrices

لماذا؟

هاتف محمول: حصل صالح على عدة عروض لشراء هاتف محمول حسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة، نظم البيانات في مصفوفة كما يلي:

	النوع	سعة الذاكرة	السعر
العرض الأول	a	512	600
العرض الثاني	b	512	500
العرض الثالث	c	256	420
العرض الرابع	d	128	390

تنظيم البيانات: **المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال حرف كبير تحته خط مثل $\underline{A}$ و $\underline{B}$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاثة صفوف

4 أعمدة

العنصر 1− موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21}.

العنصر 8− موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32}.



الفصل الثانـــى

٢-١ مقدمــة فــى المصفوفــات

Introduction to Matrices

يمكنك تحديد نوع المصفوفة برتبتها؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "m في n"). فالمصفوفة $\underline{A}$ في الأعلى هي مصفوفة من النوع 4×3 أو من الرتبة 4×3؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف ، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{A}$، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{B}$.

قراءة الرياضيات

يدل الرمز a_{ij} على العنصر الواقع في الصف i والعمود j من المصفوفة $\underline{A}$.

مثال 1 رتبة المصفوفة وعناصرها

استعمل المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلٍّ ممّا يأتي:

a) حدد رتبة المصفوفة $\underline{A}$.

$$\text{صفّان}\left\{\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}\right.$$

3 أعمدة

بما أن $\underline{A}$ فيها صفان و3 أعمدة، فإن رتبتها 3×2.

b) ما قيمة العنصر a_{21} ؟

$$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

صف 2 ← 9

عمود 1 ↑

بما أن العنصر a_{21} موجود في الصف 2 ، والعمود 1، فإن قيمته هي 9.

الفصل الثانى
٢-١ مقدمة فى المصفوفات

تحقق من فهمك :-

1) استعمل المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلّ ممّا يأتي:

a) حدد رتبة B. 3×2

b) ما قيمة b_{32} ؟   -1



الفصل الثانى

٢-١ مقدمة فى المصفوفات

Introduction to Matrices

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

مصفوفة صف
تحوي صفًا واحدًا.

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة عمود
تحوي عمودًا واحدًا.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المربعة
عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية
جميع عناصرها أصفار.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة
يدل التناظر على العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.

تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها.



الفصل الثانـــى
٢-١ مقدمــة فــى المصفوفـات
Introduction to Matrices

مثال 2 من واقع الحياة **تنظيم البيانات في مصفوفة**

كرة قدم: رصد مدرب أحد فرق كرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات الموسم الحالي فكانت عل
النحو الآتي:

معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة، 113 تمريرة، 15 قطع تمريرات، 4 أهداف.	ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة، 170 تمريرة، 40 قطع تمريرات، 11 هدفا.	ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة، 20 تمريرة، 30 قطع تمريرات، 4 أهداف.

a) نظّم البيانات في مصفوفة $\underline{A}$ ، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازليًا حسب عدد التسديدات.

b) حدد رتبة المصفوفة. وما قيمة a_{23}؟

a)

	الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
ماجد	11	40	170	43	18
ياسر	4	30	20	31	20
معاذ	4	15	113	24	12

b) هناك 3 صفوف، و 5 أعمدة؛ لذا فإن رتبة المصفوفة 5×3 وقيمة العنصر a_{23} الموجودة في الصف 2 ، والعمود 3 ، هي 20.

تحقق من فهمك :-

أسعار البيتزا (بالريال)

	صغيرة	وسط	كبيرة
ثمار البحر	13	24	35
الخضار	12	23	34
الدجاج	14	25	36
اللحم	15	27	37

2) **بيتزا:** يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من البيتزا بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

A) نظّم هذه البيانات في مصفوفة $\underline{A}$، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًا.

B) حدد رتبة المصفوفة.

C) ما قيمة العنصر a_{21}؟

	صغيرة	وسط	كبيرة
ثمار البحر	13	24	35
الخضار	12	23	34
الدجاج	14	25	36
اللحم	15	27	37

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 13 & 24 & 35 \\ 12 & 23 & 34 \\ 14 & 25 & 36 \\ 15 & 27 & 37 \end{bmatrix}$$

B) حدد رتبة المصفوفة. 4×3

C) ما قيمة العنصر a_{21} ؟



الفصل الثانـــى
٢-١ مقدمــة فــى المصفوفــات
Introduction to Matrices

مثال 3 تحليل البيانات باستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم، (في مثال 2) استعمال المصفوفة للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة:

الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
11	40	170	43	18
4	30	20	31	20
4	15	113	24	12

a) اجمع عناصر كل من العمودين 2 و 3، وفسر النتائج.

مجموع عناصر عمود 2 يساوي 98، وهو يمثل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين خلال جميع المباريات.
مجموع عناصر عمود 3 يساوي 303، وهو يمثل العدد الكلي لتمريرات اللاعبين خلال جميع المباريات.

b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2 ويقسم المجموع على 3، فما الناتج؟

الناتج هو 33 تقريبًا.

c) هل كانت طريقة المدرب في حساب معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة صحيحة؟ فسِّر إجابتك.
لا؛ لأن مجموع التسديدات في العمود 2 ليس لثلاث مباريات، ويتعين على المدرب بدلًا من ذلك قسمة مجموع عناصر العمود 2 على مجموع عناصر العمود 1 حيث سيكون المعدل الدقيق 1.96 $(98 \div 50 = 1.96)$.

d) هل جمع عناصر الصفوف يزود المدرب ببيانات ذات معنى؟ فسِّر إجابتك.
لا؛ لأن عناصر الصف عبارة عن خمسة أنواع مختلفة من البيانات.

إرشادات للدراسة

عرض البيانات
يكون من الممكن أحيانًا تبديل عناصر الصفوف وعناصر الأعمدة في المصفوفات التي تمثل معلومات من واقع الحياة.



3) صناعة: يبين الجدول أدناه عدد المصانع الوطنية العاملة في قطاعي صناعة المنسوجات، وصناعة الورق ومنتجاته في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

عدد مصانع المنسوجات وصناعة الورق ومنتجاته في 4 مناطق مختلفة في المملكة		
المنطقة	صناعة المنسوجات	صناعة الورق ومنتجاته
مكة المكرمة	28	45
الرياض	29	49
الشرقية	14	37
الباحة	1	1

A) نظّم البيانات في مصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 28 & 45 \\ 29 & 49 \\ 14 & 37 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{مكة المكرمة} \\ \text{الرياض} \\ \text{الشرقية} \\ \text{الباحة} \end{matrix}$$

B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

مجموع عناصر كل من العمودين الأول والثاني هما 72 ، 132 ، ويمثلان عدد مصانع كل من صناعة الورق ومنتجاته والمنسوجات على الترتيب.

C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

مجموع عناصر كل من الصفوف الأول والثاني والثالث والرابع هي على الترتيب 73 ثم 78 ثم 51 ثم 2 ، وتمثل عدد مصانع المنسوجات وصناعة الورق ومنتجاته في كل من مكة المكرمة والرياض والشرقية والباحة على الترتيب.

D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى؟

معدل عناصر كل صف أو كل عمود ليس له معنى.

تحقق من فهمك :-

3) **محافظات:** يبين الجدول المجاور عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

A) نظّم البيانات في مصفوفة .

B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف يعطي بيانات ذات معنى؟

عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق مختلفة في المملكة

محافظة فئة ب	محافظة فئة أ	المنطقة
8	12	الرياض
7	9	مكة المكرمة
4	4	المدينة المنورة
7	5	القصيم

المصدر: المملكة العربية السعودية، حقائق وأرقام هيئة المساحة الجيولوجية السعودية، 1433هـ

(A
$$\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 9 & 7 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

(B 30 ، 26 ويمثلان عدد محافظات الفئتين أ ، ب على الترتيب

(C 20 ، 16 ، 8 ، 12 ويمثلان عدد محافظات الفئتين المناطق المذكورة

(D هل إيجاد معدل عناصر كل صف أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى؟

معدل عناصر كل صف أو كل عمود ليس له معنى.



تــــأكـد :-

مثال 1

حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

2×4

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

4×1

3) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$

3×2

تـــأكـد :-

مثال 1

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر فيما يأتي:

5) a_{11}

1

4) a_{32}

-8

7) a_{24}

9

6) a_{33}

2

تـــأكـد :-

مثال 2,3

8) زراعة: يبين الجدول أدناه عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسة	باذنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

a) نظّم البيانات في مصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 540 & 570 & 488 & 500 \\ 850 & 1015 & 800 & 820 \end{bmatrix}$$

b) ما النوع الأقل إنتاجاً ؟

الباذنجان

c) أجمع عناصر كل صف وهل لهذه المجاميع معنى ؟ فسر إجابتك.

الصف 1 : 2098 ، ويمثل إجمالي عدد صناديق الخضروات المذكورة التي تنتجها المزرعة 1 .
الصف 2 : 3485 ، ويمثل أجمالي عدد صناديق الخضروات المذكورة التي تنتجها المزرعة 2 .

8) زراعة: يبين الجدول أدناه عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسة	باذنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

d) أجمع عناصر كل عمود ؟ فسر إجابتك .

المجاميع هي 1390 , 1585 , 1288 , 1320 تمثل إجمالي عدد الصناديق التي تنتجها المزرعتان معاً من الخيار والكوسة والباذنجان والطماطم على الترتيب

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

(9 $\begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix}$

1×2

(10 $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$

2×2

(11 $\begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2×4

(12 $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix}$

3×3

(13 $\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix}$

3×1

(14 $\begin{bmatrix} 115 \end{bmatrix}$

1×1

تـدرب وحـل المسائل :–

إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر فيما يأتي:

16) b_{22}

19

15) a_{21}

-9

18) a_{12}

y

17) b_{13}

$2x$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

نظّم البيانات الآتية في مصفوفة:

(19

الاسم	الجولة 1	الجولة 2	الجولة 3	المجموع
سعود	221	201	185	607
على	168	233	159	560
مروان	187	189	211	587

$$\begin{bmatrix} 607 & 185 & 201 & 221 \\ 560 & 159 & 233 & 168 \\ 587 & 211 & 189 & 187 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{سعود} \\ \text{علي} \\ \text{مروان} \end{matrix}$$



مثال 3

20) تخزين: ثلاثة مخازن لتوريد التمور؛ الأول فيه $2000kg$ خلاص و $1200kg$ برحي و $500kg$ سكري، والثاني فيه $3000kg$ خلاص و $1175kg$برحي و $2250kg$ سكري ، والثالث فيه $2750kg$ خلاص و $1500kg$برحي و $1700kg$ سكري.

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.

	المخزن الأول	المخزن الثاني	المخزن الثالث
خلاص	2000	3000	2750
برحي	1200	1175	1500
سكري	500	2250	1700

$$\begin{bmatrix} 2000 & 3000 & 2750 \\ 1200 & 1175 & 1500 \\ 500 & 2250 & 1700 \end{bmatrix}$$

b) أوجد مجموع عناصر كل عمود وماذا يمثل هذا المجموع؟

	مجموع المخزن
1	3700
2	6425
3	5950

وتمثل عدد الكيلوجرامات من التمر التي يحتويها كل مخزن .

c) أوجد مجموع عناصر كل صف وماذا يمثل هذا المجموع؟

	مجموع المخزن
1	7750
2	3875
3	4450

وتمثل إجمالي الكيلوجرامات الموجودة في المخازن الثلاثة من كل نوع .



تدرب وحل المسائل :–

إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$

فحدد كل عنصر فيما يأتي:

21) a_{32}	22) b_{21}	23) b_{12}	24) a_{21}
15	$4x$	-3	x

تدرب وحل المسائل :-

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$

فحدد كل عنصر فيما يأتي:

21) a_{32}

15

22) b_{21}

$4x$

23) b_{12}

-3

24) a_{21}

x



تدرب وحل المسائل :-

25) حديد التسليح: يبين الجدول أدناه أسعار حديد التسليح حسب تقرير وزارة التجارة في منطقتي الرياض وجدة يوم الثلاثاء 16 مارس 2010 م.

أسعار حديد التسليح (بالريال)		
جدة	الرياض	المقاس
2455	2410	8mm
2255	2210	14mm
2245	2200	16mm

a) أكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة.

$$\begin{bmatrix} 2410 & 2455 \\ 2210 & 2255 \\ 2200 & 2245 \end{bmatrix}$$

b) ما رتبة المصفوفة في فرع a ؟

$$3 \times 2$$

تدرب وحل المسائل :-

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} x^2+4 & y+6 \\ x-y & 2-y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$

فحدد كل عنصر فيما يأتي:

26) a_{11}

$x^2 + 4$

27) a_{22}

$2 - y$

28) b_{31}

$-y$

29) b_{23}

$-4x$



تـدرب وحـل المسائل :–

30) فلك: استعمل الجدول أدناه الذي يبين بعد بعض الكواكب عن الأرض والشـمس.

الكوكب	البعد عن الشمس (مليون ميل)	البعد عن الأرض (مليون ميل)
عطارد	36.00	57
الزهرة	67.24	26
المريخ	141.71	35
المشتري	483.88	370
زحل	887.14	477
أورانوس	1783.98	1607
نبتون	2796.46	2680

a) نظم المسافات في مصفوفة.

الشمس الأرض

$$\begin{bmatrix} 36.00 & 57 \\ 67.24 & 26 \\ 141.71 & 35 \\ 483.88 & 370 \\ 887.14 & 744 \\ 1783.98 & 1607 \\ 2796.46 & 2680 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{عطارد} \\ \text{الزهرة} \\ \text{المريخ} \\ \text{المشتري} \\ \text{زحل} \\ \text{أورانوس} \\ \text{نبتون} \end{matrix}$$

***b*) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟**

7×2

***c*) ما قيمة العنصر a_{42} .**

370



تـدرب وحـل المسائل :-

31) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال تأثير قلب الصفوف والأعمدة في المصفوفة.

الاسم	عدد التمريرات الحاسمة	عدد الأهداف
محمود	8	3
معاذ	6	5
صالح	1	8
عبدالله	4	2

a) **جدولياً:** نظم البيانات في مصفوفة على أن تكون أسماء اللاعبين في عمود .

	أهداف	تمريرات
محمود	3	8
معاذ	5	6
صالح	8	1
عبدالله	2	4

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \\ 8 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b) **جبرياً:** أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

أهداف: 18، تمريرات حاسمة : 19

c) **جدولياً:** بدّل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر الأعمدة هي عناصر الصفوف.

	عبدالله	صالح	معاذ	محمود
تمريرات	4	1	6	8
أهداف	2	8	5	3

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

d) **جبرياً:** أوجد مجاميع عناصر كل صف.

أهداف: 18، تمريرات حاسمة: 19

e) **تحليلياً:** هل هناك أي تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة؟

عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة فإن البيانات لا تتأثر .



الفصل الثاني

٢-٢ العمليات على المصفوفات

Operations with Matrices

فيما سبق:

درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات. (الدرس 2-1)

والآن:

- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد ثابت.

المفردات:

جمع مصفوفتين
adding matrices

طرح مصفوفتين
subtracting matrices

ضرب المصفوفة في عدد ثابت
scalar multiplication

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

لدى مؤسسة تجارية للمعدات الثقيلة فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلا منها ثلاثة معارض. وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

جدة

	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	109500	1050
المعرض (2)	135000	1800
المعرض (3)	150500	1800

الشرقية

	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	122000	1700
المعرض (2)	145500	1800
المعرض (3)	160000	1800

الرياض

	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	145000	1900
المعرض (2)	225000	2400
المعرض (3)	290000	2700

جمع المصفوفات وطرحها: يمكن **جمع مصفوفتين** أو **طرحهما** إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع، وتطرح في حالة الطرح.

مفهوم أساسي: جمع المصفوفات وطرحها

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $\underline{A}, \underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $\underline{A} + \underline{B}$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في $\underline{A}$ و $\underline{B}$، وكذلك $\underline{A} - \underline{B}$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضًا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز: لتكن: $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

فإن: $\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

مثال: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$

الفصل الثانــي
٢-٢ العمليات على المصفوفـات
Operations with Matrices

إرشادات للدراسة

إذا كان $\underline{A}+\underline{B}=\underline{C}$

فإن $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

مثال 1 جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix}16 & 2\\ -9 & 8\end{bmatrix}$ ، $\underline{B}=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -3 & -7\end{bmatrix}$ ، $\underline{C}=\begin{bmatrix}8\\ 6\end{bmatrix}$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

a) $\underline{A}+\underline{B}$

$$\underline{A}+\underline{B}=\begin{bmatrix}16 & 2\\ -9 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -3 & -7\end{bmatrix}$$ عوّض

$$=\begin{bmatrix}16+(-4) & 2+(-1)\\ -9+(-3) & 8+(-7)\end{bmatrix}$$ اجمع العناصر المتناظرة

$$=\begin{bmatrix}12 & 1\\ -12 & 1\end{bmatrix}$$ بسّط

b) $\underline{B}-\underline{C}$

$$\underline{B}-\underline{C}=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -3 & -7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8\\ 6\end{bmatrix}$$ عوّض

بما أن المصفوفتين $\underline{B}, \underline{C}$ لهما رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إجراء عملية الطرح $\underline{B}-\underline{C}$.

الفصل الثانــى
٢-٢ العمليات على المصفوفـات

تحقق من فهمك :-

1) أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

(1A $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3-(-4) & 4-(12) \\ -9-(8) & -5-(-7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3+4 & 4-12 \\ -9-8 & -5+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -17 & 2 \end{bmatrix}$$

(1B $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 5 & 9 \\ -11 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

2) إذا كانت $T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ ، فجد $-4T$.

$$-4T = -4\begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 & 8 \\ 4 & 16 & 8 & -36 \end{bmatrix}$$

الفصل الثاني
٢-٢ العمليات على المصفوفات

Operations with Matrices

الضرب في عدد ثابت: يمكنك ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية ضرب المصفوفة في عدد ثابت.

مفهوم أساسي — **الضرب في عدد ثابت** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة $k\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة $\underline{A}$ مضروباً في العدد الثابت k

الرموز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وَ k عدد ثابت فإن:

$$k \cdot \underline{A} = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

الفصل الثانــى
٢-٢ العمليات على المصفوفـات

تحقق من فهمك :-

2) إذا كانت $T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ ، فجد $-4T$.

$$-4T = -4\begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 & 8 \\ 4 & 16 & 8 & -36 \end{bmatrix}$$



الفصل الثانـــي
٢-٢ العمليات على المـصفوفـات
Operations with Matrices

تطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي — خصائص جمع المصفوفات

أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k:

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات	$\underline{A}+\underline{B}=\underline{B}+\underline{A}$
الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات	$(\underline{A}+\underline{B})+\underline{C}=\underline{A}+(\underline{B}+\underline{C})$
خاصية التوزيع للضرب في عدد	$k(\underline{A}+\underline{B})=k\underline{A}+k\underline{B}$



الفصل الثاني
٢-٢ العمليات على المصفوفات

Operations with Matrices

مثال 3 العمليات على المصفوفات

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$، $\underline{A} = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4\underline{B} - 3\underline{A}$.

عوّض
$$-4\underline{B} - 3\underline{A} = -4\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج ضرب المصفوفات في الثوابت
$$= \begin{bmatrix} -4(-4) & -4(-8) \\ -4(2) & -4(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3(-9) & 3(12) \\ 3(2) & 3(-6) \end{bmatrix}$$

بسّط
$$= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$$

اطرح العناصر المتناظرة
$$= \begin{bmatrix} 16-(-27) & 32-36 \\ -8-6 & 12-(-18) \end{bmatrix}$$

بسّط
$$= \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -14 & 30 \end{bmatrix}$$

3) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$، $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$، فأوجد $-6B + 7A$.

$$-6B + 7A = -6\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -72 & -30 \\ -30 & 24 \\ -24 & 42 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -35 & 21 \\ 42 & -56 \\ 14 & 63 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -107 & -9 \\ 12 & -32 \\ -10 & 105 \end{bmatrix}$$

4) استعمل البيانات أعلاه لحساب معدل المبيعات والنفقات السنوي لجميع المعارض على فرض أن السنة 52 أسبوعاً تقريباً .

$$52\begin{bmatrix} 4650 & 376500 \\ 6000 & 505500 \\ 6300 & 600500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 241800 & 19578000 \\ 312000 & 26286000 \\ 327600 & 31226000 \end{bmatrix}$$

تدل هذه المصفوفة على معدل المبيعات والنفقات في 52 أسبوعاً.



الفصل الثاني
٢-٢ العمليات على المصفوفات
Operations with Matrices

مثال 4 استعمال العمليات على المصفوفات

أعمال: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية الدرس، وعبر عن معدل المبيعات والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع.

حتى يتم حساب المبيعات في خمسة أسابيع، يجب ضرب كل مصفوفة في العدد 5 وجمع المصفوفات الناتجة معًا.

ضرب كل مصفوفة في 5 ثم الجمع

$$5\begin{bmatrix} 1900 & 145000 \\ 2400 & 225000 \\ 2700 & 290000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1700 & 122000 \\ 1800 & 145500 \\ 1800 & 160000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1050 & 109500 \\ 1800 & 135000 \\ 1800 & 150500 \end{bmatrix}$$

تطبيق قاعدة الضرب في ثابت

$$= \begin{bmatrix} 9500 & 725000 \\ 12000 & 1\,125000 \\ 13500 & 1\,450000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8500 & 610000 \\ 9000 & 727500 \\ 9000 & 800000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5250 & 547500 \\ 9000 & 675000 \\ 9000 & 752500 \end{bmatrix}$$

اجمع المصفوفات

النفقات   المبيعات

$$= \begin{bmatrix} 23250 & 1882500 \\ 30000 & 2527500 \\ 31500 & 3002500 \end{bmatrix}$$

تدل المصفوفة النهائية على معدل المبيعات والنفقات في خمسة أسابيع.

المخطط المالي
يستعمل المخطط المالي المصفوفات لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة
عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل البيانات المتناظرة.

لماذا؟

لدى مؤسسة تجارية للمعدات الثقيلة فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلًّا منها ثلاثة معارض.
وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	جدة: المبيعات	جدة: النفقات	الشرقية: المبيعات	الشرقية: النفقات	الرياض: المبيعات	الرياض: النفقات
المعرض (1)	109500	1050	122000	1700	145000	1900
المعرض (2)	135000	1800	145500	1800	225000	2400
المعرض (3)	150500	1800	160000	1800	290000	2700

4) استعمل البيانات أعلاه لحساب معدل المبيعات والنفقات الشهري لجميع المعارض على فرض أن الشهر ٣٠ يوما

نقسم كل عنصر من عناصر مصفوفة مجموع المصفوفات على 7 ثم ضرب الناتج في 30

$$\frac{30}{7}\begin{bmatrix} 4650 & 376500 \\ 6000 & 505500 \\ 6300 & 600500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19928 & 1613571 \\ 25714 & 2166429 \\ 27000 & 2573571 \end{bmatrix}$$



تــــأكـد :-

مثال 1

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:

1) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$

غير ممكن

3) $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2 & -18 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 7 & 31 & -14 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

تـــأكـد :-

مثال 2

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

5) $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 18 & 12 & 0 \\ -6 & 42 & -24 \\ -12 & -18 & 21 \end{bmatrix}$$

6) $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -90 & 54 & -12 & -18 \\ -36 & 66 & -84 & 12 \\ -24 & 48 & 60 & -162 \end{bmatrix}$$



تـــأكـد :-

مثـال 3

استعمل المصفوفات A,B,C,D لإيجاد ناتج كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$4B - 2A$ (7

$$4B - 2A = 4\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & -4 \\ -8 & 28 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ -14 & 38 \end{bmatrix}$$

تــــأكــد :-

مثـال 3

استعمل المصفوفات A,B,C,D لإيجاد ناتج كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

8) $-8C + 3A$

$$-8C + 3A = -8\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 48 \\ -96 & 56 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ 9 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 36 \\ -87 & 41 \end{bmatrix}$$



تـــأكـد :-

مثال 4

درجات حرارة: تبين المصفوفة $\underline{L}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينة ما. وتبين المصفوفة $\underline{H}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى في تلك المدينة .

$$\underline{H}=\begin{bmatrix}39.9 & 45.2 & 55.3\\65.1 & 74.0 & 82.3\\85.9 & 84.6 & 78.1\\66.9 & 54.5 & 44.3\end{bmatrix} \qquad \underline{L}=\begin{bmatrix}24.1 & 27.7 & 35.9\\44.1 & 53.6 & 62.2\\66.4 & 64.9 & 57.9\\46.4 & 37.3 & 28.4\end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة التي تمثل الفرق بين المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟

$$\underline{\mathbf{H}}-\underline{\mathbf{L}}=\begin{bmatrix}39.9 & 45.2 & 55.3\\65.1 & 74.0 & 82.3\\85.9 & 84.6 & 78.1\\66.9 & 54.5 & 44.3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}24.1 & 27.7 & 35.9\\44.1 & 53.6 & 62.2\\66.4 & 64.9 & 57.9\\46.4 & 37.3 & 28.4\end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{H}}-\underline{\mathbf{L}}=\begin{bmatrix}15.8 & 17.5 & 19.4\\21 & 20.4 & 20.1\\19.5 & 20.3 & 21.8\\20.5 & 17.2 & 15.9\end{bmatrix}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

10) $\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 2,3,4

مشروبات: يبين الجدول المجاور قائمة أسعار المشروبات في مطعم، إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 50%.

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازي	3	4	5
شاي	2	3	4
قهوة	2	3	4
عصير	4	5	6

a) أكتب المصفوفة *C* التي تمثل الأسعار الحالية.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة *C* فيه لإيجاد المصفوفة *N* التي تمثل الأسعار الجديدة ؟

بفرض السعر الحالي $= x$ السعر الجديد $= x + 50\%x$

السعر الجديد $= 1.5\ x$

c) جد المصفوفة *N*.

$$N = 1.5 \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 4.5 & 6 & 7.5 \\ 3 & 4.5 & 6 \\ 3 & 4.5 & 6 \\ 6 & 7.5 & 9 \end{bmatrix}$$

تدرب وحل المسائل :-

d) جد المصفوفة $N - C$. ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

$$N - C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.5 & 6 & 7.5 \\ 3 & 4.5 & 6 \\ 3 & 4.5 & 6 \\ 6 & 7.5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$N - C = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 & 2.5 \\ 1 & 1.5 & 2 \\ 1 & 4.5 & 2 \\ 2 & 2.5 & 3 \end{bmatrix}$$

تمثل هذه المصفوفة الزيادة في سعر كل صنف.

تدرب وحل المسائل :-

13 $\begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

14 $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -8 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -8 & 12 \\ -11 & -5 & 3 \\ -1 & 22 & -9 \\ -6 & 31 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 3 & 17 & -2 \\ 1 & -23 & 14 \\ 13 & -40 & -5 \end{bmatrix}$$

تدرب وحل المسائل :-

15 $\begin{bmatrix} 62 \\ -37 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 & 76 & -13 \end{bmatrix}$

غير ممكن

المصفوفتان ليس لهما نفس الدرجة

16 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -9 & -3 \\ 5 & 14 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -6 & 13 & 14 \\ -11 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

تدرب وحل المسائل :-

17 $\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -32 \end{bmatrix}$$

18 $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ ، غير ممكن

المصفوفتان ليس لهما نفس الدرجة



تدرب وحل المسائل :-

18) أكتب: تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، 5000 كتاب تاريخي و 5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000كتاب علمي، و 10000 كتاب تاريخي و 2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، 700 كتاب تاريخي ، و 800 كتاب أدبي.

a) رتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وأرمز إليها بالرمز A,B,C .

	المكتبة		
كتاب	A	B	C
علمي تاريخي أدبي	$\begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 5000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15000 \\ 10000 \\ 2500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4000 \\ 700 \\ 800 \end{bmatrix}$



تدرب وحل المسائل :-

18) أكتب: تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، 5000 كتاب تاريخي و 5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000كتاب علمي، و 10000 كتاب تاريخي و 2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، 700 كتاب تاريخي ، و 800 كتاب أدبي.

b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاثة، وعبر عن ذلك بمصفوفة.

المكتبة				
كتاب	A	B	C	
علمي	10000	15000	4000	29000
تاريخي	5000	10000	700	15700
أدبي	5000	2500	800	8300

c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C ؟



تدرب وحل المسائل :-

18) أكتب: تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، 5000 كتاب تاريخي و 5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000كتاب علمي، و 10000 كتاب تاريخي و 2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، 700 كتاب تاريخي ، و 800 كتاب أدبي.

c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C ؟

	المكتبة		
كتاب	A	B	C
علمي	10000	15000	4000
تاريخي	5000	10000	700
أدبي	5000	2500	800

$$\begin{bmatrix}10000\\5000\\5000\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4000\\700\\800\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6000\\4300\\4200\end{bmatrix}$$

تدرب وحل المسائل :-

18) أكتب: تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، 5000 كتاب تاريخي و 5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000كتاب علمي، و 10000 كتاب تاريخي و 2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، 700 كتاب تاريخي ، و 800 كتاب أدبي.

d) أوجد المصفوفة $A + B$ هل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة؟ فسر إجابتك.

$$\begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 5000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15000 \\ 10000 \\ 2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25000 \\ 15000 \\ 7500 \end{bmatrix}$$

يمثل ناتج الجمع عدد الكتب من الأنواع الثلاثة في المكتبتين.

تدرب وحل المسائل :-

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن وإذا تعذر ذلك فأكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب.

20

$$-3\begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -54 & 18 & 24 \\ 15 & 9 & -36 \\ 0 & -9x & 3y \end{bmatrix}$$



تدرب وحل المسائل :-

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن وإذا تعذر ذلك فأكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب.

21 $-4\begin{bmatrix}-7\\4\\-3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-8\\3x\\-9\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}4\\x-6\\12\end{bmatrix}$

$$-4\begin{bmatrix}-7\\4\\-3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-8\\3x\\-9\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}4\\x-6\\12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}28\\-16\\12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-24\\9x\\-27\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}20\\5x-30\\60\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4\\9x-16\\-15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}20\\5x-30\\60\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-16\\4x+14\\-75\end{bmatrix}$$

تدرب وحل المسائل :-

22 $-5\left(\begin{bmatrix}4 & -8\\ 8 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & -6\end{bmatrix}\right)$

$$-5\left(\begin{bmatrix}4 & -8\\ 8 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & -6\end{bmatrix}\right)$$

$$= -5\left(\begin{bmatrix}8 & -10\\ 5 & -15\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}-40 & 50\\ -25 & 75\end{bmatrix}$$

الفهرس

تدرب وحل المسائل :-

23 $-6\left(\begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix}\right)$

$$-6\left(\begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix}\right)$$

$$= -6\left(\begin{bmatrix} 1 & 3y-6 \\ 4x+9 & -9 \\ x-7 & xy+2x \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -18y+36 \\ -24x-54 & 54 \\ -6x+42 & -6xy-12x \end{bmatrix}$$

الفهرس

تدرب وحل المسائل :-

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن وإذا تعذر ذلك فأكتب " لا يمكن " مع ذكر السبب:

24 $-2\begin{bmatrix} -9.2 & -8.4 \\ 5.6 & -4.3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 4.1 & -2.9 \\ 7.2 & -8.2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 18.4 & 16.8 \\ -11.2 & 8.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16.4 & 11.6 \\ -28.8 & 32.8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 28.4 \\ -40 & 41.4 \end{bmatrix}$$

الفهرس

تدرب وحل المسائل :-

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن وإذا تعذر ذلك فأكتب " لا يمكن " مع ذكر السبب:

25 $-\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ -11.25 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ -8/3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 24 \\ -\frac{167}{12} & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ -13\frac{11}{12} & -10 \end{bmatrix}$$

الفهرس



٢-٣ ضـــرب المصفوفـــات Multiplying Matrices

فيما سبق:

درستُ ضرب المصفوفات في عدد ثابت. (الدرس 2-2)

والآن:

- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 3 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام $\underline{B}$، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر بيع كل نوع من الأقلام بالمصفوفة $\underline{P}$.

مصفوفة عدد الأقلام $\underline{B}$

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأسعار $\underline{P}$

قلم الرصاص، الحبر السائل، الحبر الجاف

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة $\underline{A}$ ذات الرتبة $m\times r$ في المصفوفة $\underline{B}$ ذات الرتبة $r\times t$، فإن الناتج هو المصفوفة $\underline{AB}$ ذات الرتبة $m\times t$.

$$\underline{A} \quad \cdot \quad \underline{B} \quad = \quad \underline{AB}$$

$$m\times r \qquad r\times t \qquad m\times t$$

متساويان (r و r)

رتبة AB (m و t)



٣-٢ ضرب المصفوفات Multiplying Matrices

مثال 1 رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $\underline{A} \cdot \underline{B}$ في كلٍّ مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

a) $\underline{A}_{3 \times 4} \cdot \underline{B}_{4 \times 2}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$$3 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 3 \times 2$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة $\underline{A}$ يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{B}$، فإن مصفوفة حاصل الضرب $\underline{A} \cdot \underline{B}$ معرّفة، ورتبتها 3×2 .

b) $\underline{A}_{5 \times 3} \cdot \underline{B}_{5 \times 4}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B}$$

$$5 \times 3 \quad 5 \times 4$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة $\underline{A}$ لا يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{B}$، فإن مصفوفة حاصل الضرب $\underline{A} \cdot \underline{B}$ غير معرّفة.

إرشادات للدراسة

رمز المصفوفة

أحيانًا تكتب $\underline{A}_{m \times n}$ لتعبر عن مصفوفة $\underline{A}$ رتبتها $m \times n$.

الفصل الثانى
٢-٣ ضـــرب المصفوفـــات

تحقق من فهمك :-

1) هل يمكن إيجاد $A \cdot B$ في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة.

1A) $B_{6\times2}$ ، $A_{4\times6}$

A	B	=	$A.B$
4×6	$= 6 \times 2$		4×2

1B) $B_{3\times2}$ ، $A_{3\times2}$

A	B	=	$A.B$
3×2	$\neq 3 \times 2$		غير معرفة



الفصل الثانـــي
٢-٣ ضــــرب المصفوفـــات

يمكنك إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي

ضرب المصفوفات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة $\underline{A}\,\underline{B}$ هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة $\underline{A}$، بعناصر العمود r من المصفوفة $\underline{B}$ بالترتيب.

الرموز:

$$\underset{\underline{A}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \cdot \underset{\underline{B}}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \underset{\underline{A}\,\underline{B}}{\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times7 & 2\times6+3\times8 \\ 1\times5+4\times7 & 1\times6+4\times8 \end{bmatrix}$$

الفصل الثانـي
٢-٣ ضـرب المصفوفـات

مثال 2 ضرب المصفوفات المربعة

أوجد XY إذا كانت $\underline{Y}=\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 3 & 3\end{bmatrix}$، $\underline{X}=\begin{bmatrix}6 & -3\\ -10 & -2\end{bmatrix}$

$$\underline{XY}=\begin{bmatrix}6 & -3\\ -10 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

الخطوة 1: اضرب عناصر الصف الاول في المصفوفة $\underline{X}$ في عناصر العمود الاول في المصفوفة $\underline{Y}$ بالترتيب، ثم اجمع نواتج الضرب، وضع النتيجة في الصف الأول، العمود الأول من المصفوفة $\underline{XY}$.

$$\begin{bmatrix}6 & -3\\ -10 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6(-5)+(-3)(3) & \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الأول والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الأول والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix}6 & -3\\ -10 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3)\\ & \end{bmatrix}$$

تنبيه!

المحافظة على التركيز

من السهل أن تفقد التركيز عند ضرب المصفوفات، وربما تساعدك تغطية الصفوف أو الأعمدة التي لا تقوم بضربها عند إيجاد عناصر مصفوفة الضرب.



الفصل الثانى
٢-٣ ضـــرب المصفوفـــات

الخطوة 3: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الأول، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الأول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: اتبع الخطوات السابقة نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix}$$

الخطوة 5: بسّط المصفوفة الناتجة.

$$\begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

الفصل الثانى
٣-٢ ضــرب المصفوفــات

تحقق من فهمك :-

(2)

إذا كانت $V = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$، $U = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد VU.

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & -50 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$$



الفصل الثاني
٢-٣ ضرب المصفوفات

مثال 3 من واقع الحياة — ضرب المصفوفات

سباحة: في مسابقة للسباحة بين أربع فرق سجلت 7 نقاط لمن يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.

الفريق	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
A	4	7	3
B	8	9	1
C	10	5	3
D	3	3	6

افهم: **المعطيات:**

- جدول يبين عدد مرات حصول 4 فرق على المراكز الثلاثة الأولى في مسابقة للسباحة.
- عدد النقاط التي تحتسب للفريق في كل مركز.

المطلوب:

- تحديد الفريق الفائز.

خطط: يمكن إيجاد النقاط النهائية التي أحرزها كل فريق بضرب مصفوفة النتائج للفريق في مصفوفة عدد النقاط التي تحتسب لكلٍّ من المراكز (الأول والثاني والثالث).

حل: اكتب كلًّا من النتائج والنقاط التي تم الحصول عليها في مصفوفتين، ورتب المصفوفتين على أن يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط يساوي عدد الأعمدة في مصفوفة النتائج.

الربط مع الحياة

تدل البحوث الصحية والرياضية أن ممارسة السباحة نصف ساعة يوميًا تخفض ضغط الدم وتقوي القلب وتقلل معدل الكولسترول في الدم وتزيد كفاءة الدورة الدموية، وتحرق 500 : 250 سعرة حرارية؛ لذا تعدّ من أفضل الرياضات لتخفيض الوزن.

المصدر: ويكيبيديا: سباحة
http://ar.wikipedia.org/wiki



الفصل الثانى
٢-٣ ضرب المصفوفات

النتائج النقاط

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \underline{P} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اضرب المصفوفتين. $\underline{RP}$

$$\underline{RP} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7) + 7(4) + 3(2) \\ 8(7) + 9(4) + 1(2) \\ 10(7) + 5(4) + 3(2) \\ 3(7) + 3(4) + 6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$

تبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي أحرزها كلٌّ من الفرق A, B, C, D على الترتيب؛ لذا فالفريق C هو الفائز في المسابقة؛ لأنه حصل على أكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة.

تحقق: المصفوفة $\underline{R}$ من الرتبة 4×3 ، والمصفوفة $\underline{P}$ من الرتبة 3×1 ؛ لذا فإن حاصل الضرب سيكون مصفوفة من الرتبة 4×1.

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

نوع القلم	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
	الشهر وعدد الأقلام			
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 3 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام $\underline{B}$، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر بيع كل نوع من الأقلام بالمصفوفة $\underline{P}$.

مصفوفة عدد الأقلام $\underline{B}$

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأسعار $\underline{P}$

قلم الرصاص — الحبر السائل — الحبر الجاف

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

استعمل ضرب المصفوفات لتحديد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1x153+3x12+2x82 & 1x217+3x6+2x146 & 1x197+3x7+2x102 & 1x249+3x8+2x158 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{353} & \mathbf{527} & \mathbf{422} & \mathbf{589} \end{bmatrix}$$

الفصل الثانـــى
٣-٢ ضـــرب المصفوفـــات

خصائص ضرب المصفوفات: تذكّر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.

مثال 4 اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $\underline{H}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$، $\underline{G}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{G}\,\underline{H}$

$$\underline{G}\,\underline{H}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-6-5 & 3-24-35 \\ 8+4+0 & 12+16+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

b) $\underline{H}\,\underline{G}$

$$\underline{H}\,\underline{G}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+12 & 6-6 & -10+0 \\ -2-32 & -6+16 & 10+0 \\ 1+28 & 3-14 & -5+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{G}\,\underline{H} \neq \underline{H}\,\underline{G}$.

تحقق من فهمك :-

4) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فهل $AB = BA$ ؟

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 19 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

إذن $AB \neq BA$ ، بصفة عامة.

مثال 5 اختبار خاصية التوزيع

إذا كانت $\underline{L}=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{K}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{J}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{J}(\underline{K}+\underline{L})$

عوّض
$$\underline{J}(\underline{K}+\underline{L})=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

اجمع المصفوفتين
$$=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

اضرب المصفوفتين
$$=\begin{bmatrix} -2+8 & 2+12 \\ 5-4 & -5-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

b) $\underline{J}\underline{K}+\underline{J}\underline{L}$

$$\underline{J}\underline{K}+\underline{J}\underline{L}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2(3)+4(-1) & 2(2)+4(3) \\ -5(3)+(-2)(-1) & -5(2)+(-2)(3) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2(-4)+4(3) & 2(-1)+4(0) \\ -5(-4)+(-2)(3) & -5(-1)+(-2)(0) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -13 & -16 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{J}(\underline{K}+\underline{L})=\underline{J}\underline{K}+\underline{J}\underline{L}$.

تحقق من فهمك :-

5) إذا كانت $\underline{T}=\begin{bmatrix}-3 & 7\\ -4 & 8\end{bmatrix}$، $\underline{S}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & 5\end{bmatrix}$، $\underline{R}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$، فحدِّد ما إذا كانت المعادلة $(\underline{S}+\underline{T})\underline{R}=\underline{S}\underline{R}+\underline{T}\underline{R}$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا.

$$(S+T)R=\left(\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 7\\ -4 & 8\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 13\\ -6 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+13 & -1+39\\ -12+13 & 6+39\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 38\\ 1 & 45\end{bmatrix}$$ → **1**

$$=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 7\\ -4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8+6 & -4+18\\ -4+5 & 2+15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6+7 & \\ \text{[illegible]} & 4+24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14 & 14\\ 1 & 17\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & \\ \text{[illegible]} & 28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 38\\ 1 & 45\end{bmatrix}$$ → **2**

من 1,2 المعادلة صحيحة



تــــأكـد :–

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص ضرب المصفوفات

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$، ولأي عدد k ،
على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٍّ منها معرفتين:

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات	$(\underline{A}\underline{B})\underline{C} = \underline{A}(\underline{B}\underline{C})$
الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد	$k(\underline{A}\underline{B}) = (k\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(k\underline{B})$
خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$\underline{C}(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{C}\underline{A} + \underline{C}\underline{B}$
خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A}\underline{C} + \underline{B}\underline{C}$

تــــأكـد :-

مثال 1

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يأتي أم لا،
وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $A_{2\times4} \cdot B_{4\times3}$

2×3

2) $C_{5\times4} \cdot D_{5\times4}$

غير معرفة

3) $E_{8\times6} \cdot F_{6\times10}$

8×10



تـــأكـد :-

مثـال 2

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -12+(-2) & 6+(-4) \\ -42+10 & 21+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 2 \\ -32 & 41 \end{bmatrix}$$

5) $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 10+(-10) & 40+4 \\ -7+15 & -28+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 44 \\ 8 & -34 \end{bmatrix}$$

تــــأكـد :-

مثال 2

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

6) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

$= [-18+(-12) \quad 36+14]$

$= \begin{bmatrix} -30 & 50 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 9 & 90 & -9 \\ -6 & -60 & 6 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

غير معرّفة

تـــأكـد :-

مثـال 2

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

9) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -44 \\ 25 \end{bmatrix}$$

10) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 26 & 14 & -31 \\ -22 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

تـــأكـد :ـ

مثال 2

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

11) $$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12-35+6+1 & -6+5+0+0 \\ -18-7+16+3 & 9+1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & -1 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$$



تـــأكـد :-

مثال 3

12) لياقة بدنية: يبين الجدول أدناه عدد المشتركين في دورات اللياقة في المستويين الأول والثاني. إذا كانت رسوم الاشتراك الأسبوعي 110 ريالات، ورسوم الاشتراك الشهري 165ريالاً، ورسوم الاشتراك السنوي 439 ريالاً.

عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية		
الاشتراك	المستوى الأول	المستوى الثاني
الأسبوعي	35	28
الشهري	32	17
السنوي	18	12

a) اكتب مصفوفة عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها، ومصفوفة رسوم الاشتراك.

$$\begin{bmatrix} 110 & 165 & 439 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 35 & 28 \\ 32 & 17 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}$$

b) أوجد المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني.

$$\begin{bmatrix} 110 & 165 & 439 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 35 & 28 \\ 32 & 17 \\ 18 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17032 & 11153 \end{bmatrix}$$

$28185 = 17032 + 11153$ ريالاً.

تـــأكـد :-

مثال 4,5

استعمل المصفوفات

$$X = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \;,\; Y = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \;,\; Z = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$$

لتحديد إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

13) $XY = YX$

$$XY = \begin{bmatrix} 50+3 & -60 -27 \\ -10+8 & 12 - 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & -87 \\ -2 & -69 \end{bmatrix}$$

$$YX = \begin{bmatrix} 50+12 & 15 - 48 \\ 10+18 & 3 - 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 & -33 \\ 28 & -69 \end{bmatrix}$$

لا: $\begin{bmatrix} 53 & -87 \\ -2 & -60 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 62 & -33 \\ 28 & -69 \end{bmatrix}$



تـــأكـد :-

مثال 4,5

استعمل المصفوفات

$$X = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} , \; Y = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} , \; Z = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$$

لتحديد إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

14) $X(YZ) = (XY)Z$

$$YZ = \begin{bmatrix} 25 - 48 & 5 - 24 \\ 5 - 72 & 1 - 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & -19 \\ -67 & -35 \end{bmatrix}$$

$$X(YZ) = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -23 & -19 \\ -67 & -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix}$$

$$(XY)Z = \begin{bmatrix} 53 & -87 \\ -2 & -69 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix}$$

$$X(YZ) = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix}$$ نعم ؛

$$(XY)Z = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix}$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا،
وإن كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

15) $P_{2\times3} \cdot Q_{3\times4}$

2×4

16) $A_{5\times5} \cdot B_{5\times5}$

5×5

17) $M_{3\times1} \cdot N_{2\times3}$

غير معرّفة

18) $X_{2\times6} \cdot Y_{6\times3}$

2×3

19) $J_{2\times1} \cdot K_{2\times1}$

غير معرّفة

20) $S_{5\times2} \cdot T_{2\times4}$

5×4



تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

21) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix}$

$= [-10+36]$

$= [26]$

22) $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

= [-12-63 -

12+21 -8 - 9 - 8+]

3

$= \begin{bmatrix} -75 & 9 \\ -17 & -5 \end{bmatrix}$

24) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6+0 & 3+0 \\ 30+14 & -15-4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 44 & -19 \end{bmatrix}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

25) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -4 & -10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$

غير معرفة

26) $\begin{bmatrix} -6 & 4 & -9 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -42+8-36 \\ 14+16+28 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -70 \\ 58 \end{bmatrix}$

27) $\begin{bmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8-54+6 & 4+63-3 \\ 16+6+0 & 8-7+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{bmatrix}$

28) $\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -24 & -8 \end{bmatrix}$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

29) **أجنحة فندقية :** لدى مؤسسة للأجنحة الفندقية 3 مبانٍ للإيجار، ويبين الجدول المجاور عدد الغرف في كل مبنى. فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا 220 ريالًا، وللغرفة التي تحوي سريرين 250 ريالًا، وللغرفة التي تحوي ثلاثة أسرَّة 360 ريالًا.

a) اكتب مصفوفة تمثّل تقسيمات الأبنية، ثم أكتب مصفوفة أسعار الغرف.

تقسيمات الأبنية السكنية			
جناح	غرفة بسريرين	غرفة بسرير واحد	المبنى
2	2	3	1
1	3	2	2
0	3	4	3

$$I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 220 \\ 250 \\ 360 \end{bmatrix}$$

b) أكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومي للمؤسسة على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 220 \\ 250 \\ 360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1880 \text{ ريالاً} \\ 1550 \text{ ريالاً} \\ 1630 \text{ ريالاً} \end{bmatrix}$$

c) كم مقدار الدخل اليومي الكلي على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

$1630 + 1550 + 1880 = 5060$ ريالاً.

تدرب وحل المسائل :-

مثال 4,5

استعمل $P=\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}6 & 4\\-2 & -5\end{bmatrix}$, $R=\begin{bmatrix}4 & 6\\-6 & 4\end{bmatrix}$, $k=2$

لتحدد أن كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

$k(PQ) = P(kQ)$ (30

نعم ؛ $k\,(PQ) = \begin{bmatrix}52 & 42\\4 & -12\end{bmatrix}$

$P(kQ) = \begin{bmatrix}52 & 42\\4 & -12\end{bmatrix}$

$PQR = RQP$ (31

لا ؛ $PQR = \begin{bmatrix}-22 & 240\\44 & -12\end{bmatrix}$

$RQP = \begin{bmatrix}34 & -40\\-220 & -44\end{bmatrix}$

$PR + QR = (P + Q)\,R$ (32

نعم ؛ $PR + QR = \begin{bmatrix}22 & 72\\14 & -18\end{bmatrix}$

$(P + Q)\,R = \begin{bmatrix}22 & 72\\14 & -18\end{bmatrix}$

$R(P + Q) = PR + QR$ (33

لا ؛ $R(P + Q) = \begin{bmatrix}34 & -6\\-64 & -30\end{bmatrix}$

$PR + QR = \begin{bmatrix}22 & 72\\14 & -18\end{bmatrix}$



تدرب وحل المسائل :-

34) تنسيق زهور: اشترى محل تنسيق زهور 200 زهرة جوري، و 150 زهرة نرجس ، و 100 زهرة زنبق ، وسعر شراء الزهور من كل نوع مبين في الجدول أدناه وكذلك سعر بيع الزهرة بعد تغليفها وتنسيقها في طاقة.

سعر البيع	سعر الشراء	الزهور
3ريالات	0.50ريال	جوري
6ريالات	1.5ريال	نرجس
7ريالات	2ريال	زنبق

a) نظم البيانات في مصفوفتين واستعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور.

$$\begin{bmatrix} 200 & 150 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.50 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} = [\text{525ريالاً}]$$

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل علية صاحب المحل من بيع الزهور .

$$\begin{bmatrix} 200 & 150 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = [\text{2200ريالاً}]$$

c) استعمل العمليات على المصفوفات لإيجاد ربح المحل من بيع الزهور .

2200 - 525 = 1675ريالاً

تدرب وحل المسائل :-

استعمل المصفوفات

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3y & -4.5 \end{bmatrix} ،\ Y = \begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ x+2 & y \\ 13 & 1.2 \end{bmatrix} ،\ Z = \begin{bmatrix} -3 \\ x+y \end{bmatrix}$$

لإيجاد ناتج الضرب في كل مما يأتي إذا كان ممكنا:

35) XY غير معرفة

36) YX

$$\begin{bmatrix} -10-4.5y & 36.75 \\ 2x+4+3y^2 & -6x-4.5y-12 \\ 3.6y+26 & -83.4 \end{bmatrix}$$

37) ZY غير معرفة

38) YZ

$$\begin{bmatrix} -1.5x-1.5y+15 \\ y^2+xy-3x-6 \\ 1.2x+1.2y-39 \end{bmatrix}$$

39) $(YX)Z$

$$\begin{bmatrix} 36.75x+50.25y+30 \\ -6x^2-18x-10.5xy-13.5y^2-12y-12 \\ -83.4x-94.2y-78 \end{bmatrix}$$

40) $(XZ)X$ غير معرفة

41) $X(ZZ)$ غير معرفة

42) $(XX)Z$

$$\begin{bmatrix} 15x+69y-12 \\ -18y^2+42.75y-18xy+20.25x \end{bmatrix}$$

الفهرس

٢-٤ المحـــددات وقــاعـــدة كــرامـــر

Determinants and Cramer's Rule



فيما سبق:

درستَ حل أنظمة من المعادلات جبريًا.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أحسب المحدّدات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات:

المحدّدة
determinant

محدّدة الدرجة الثانية
second-order determinant

محدّدة الدرجة الثالثة
third-order determinant

قاعدة الأقطار
diagonal rule

مصفوفة المعاملات
coefficient matrix

قاعدة كرامر
Cramer's Rule

لماذا؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، حدّد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحدّدات لمعرفة مساحتها.



المحدّدات: كل مصفوفة مربعة لها **محدِّدة**، وتسمى محدّدة المصفوفة من النوع 2×2 **محدِّدة الدرجة الثانية**.

مفهوم أساسي — محدّدة الدرجة الثانية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يرمز لمحدّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ (القطر الرئيس)

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$



الفصل الثانــى
٢-٤ المحـددات وقـاعـدة كـرامـر
Determinants and Cramer's Rule

مثال 1 محدَّدة الدرجة الثانية

أوجد قيمة كل محدَّدة فيما يأتي:

(a $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - 8(-4)$ تعريف محدّدة الدرجة الثانية

$= 45 + 32$ بسّط

$= 77$

(b $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 4(6)$ تعريف محدّدة الدرجة الثانية

$= 0 - 24$ بسّط

$= -24$

قراءة الرياضيات

المحدّدات:
يرمز لمحدّدة المصفوفة A بالرمز $|A|$



الفصل الثانــى

٢-٤ المحــددات وقــاعــدة كــرامــر

تحقق من فهمك :-

A) احسب قيمة المحددة الآتية: $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -6(8) - 10(-7)$$

$$= -48 + 70$$

$$= 22$$

$1B$) احسب قيمة المحددة الآتية: $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} = 7(-4) - 9(5)$$

$$= -28 - 45$$

$$= -73$$



٢-٤ المحددات وقاعدة كرامر

Determinants and Cramer's Rule

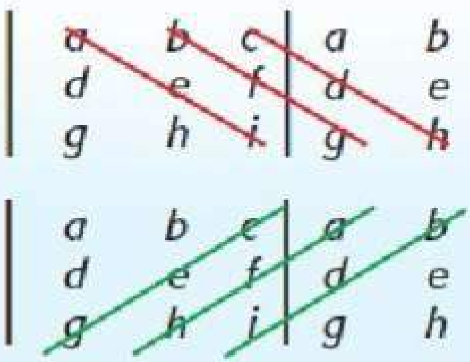
تُسمى محدِّدات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محدِّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هذه المحدِّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حساب محدِّدة المصفوفة 3×3

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار



خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة 3×3.



الفصل الثانــي
٢-٤ المحـــددات وقـــاعـدة كـرامـر
Determinants and Cramer's Rule

مثال 2 حساب محدَّدة المصفوفة 3 × 3

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 6 & 2 & -3 \\ 9 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال محدَّدة المصفوفة 2 × 2

أولاً: باستعمال قاعدة الأقطار:

الخطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدَّدة.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

الخطوة 2: جد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

$4(2)(9) = 72$ $\qquad$ $-4(2)(3) = -24$

$-8(6)(-4) = 192$ $\qquad$ $5(6)(4) = 120$

$3(-3)(5) = -45$ $\qquad$ $9(-3)(-8) = 216$

الخطوة 3: اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة.

$$72 + 192 + (-45) = 219 \qquad -24 + 120 + 216 = 312$$

الخطوة 4: اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$219 - 312 = -93$$

فتكون قيمة المحدِّدة هي -93

ثانيًا: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-8)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times -12 + 8 \times -3 + 3 \times -7 = -93$$

الفصل الثاني
٢-٤ المحددات وقاعدة كرامر

تحقق من فهمك :-

2A): احسب قيمة المحددة الآتية:
$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -5 & 9 \\ -2 & -1 \\ -4 & 6 \end{matrix}$$

$$-5(-1)(2) + 9(5)(-4) + 4(-2)(6) = -218$$

$$\left|\begin{matrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -5 & 9 \\ -2 & -1 \\ -4 & 6 \end{matrix}$$

$$-4(-1)(4) + 6(5)(-5) + 2(-2)(9) = -170$$

قيمة المحددة = $-218 - (-170) = -48$

الفصل الثانـــى
٤-٢ المحــددات وقــاعــدة كــرامــر

تحقق من فهمك :-

2B): احسب قيمة المحددة الآتية: $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$\left|\begin{matrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -8 & -4 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

-8(-5)(1) + (-4)(-8)(3) + 4(0)(4) = 136

$$\left|\begin{matrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -8 & -4 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

3(-5)(4) + 4(-8)(-8) + 1(0)(-4) = 196

قيمة المحددة = 136 – 196 = -60

الفصل الثانى

٤-٢ المحددات وقاعدة كرامر

Determinants and Cramer's Rule

تستعمل المحدِّدات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكنك استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

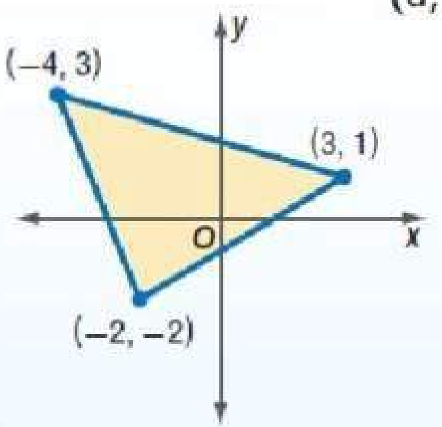
مفهوم أساسي — مساحة المثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

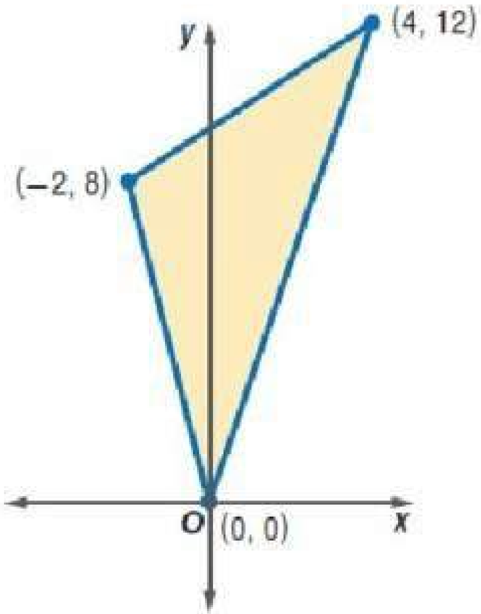


٤-٢ المحددات وقاعدة كرامر

Determinants and Cramer's Rule

مثال 3 من واقع الحياة — حساب مساحة المثلث باستعمال المحدِّدات

عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحدِّدات لإيجاد مساحة الإقليم.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$(a, b) = (0, 0)$

$(c, d) = (4, 12)$

$(e, f) = (-2, 8)$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

قاعدة الأقطار

$$\left|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{matrix} \qquad \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{matrix}$$

اجمع نواتج ضرب عناصر الأقطار

$$0 + 0 + 32 = 32 \qquad -24 + 0 + 0 = -24$$

قيمة A

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

الربط مع الحياة

يعيش النمر في أقاليم قد تصل مساحتها إلى $100\,km^2$، ويحرس النمر إقليمه الذي يعيش فيه ويعرفه بتتبع أثره وأماكن روثه.

المصدر: National Geographic

بسّط $= \left(\frac{1}{2}\right)[32 - (-24)] = 28$

فتكون مساحة الإقليم الذي يعيش فيه النمر هي $28\ km^2$.



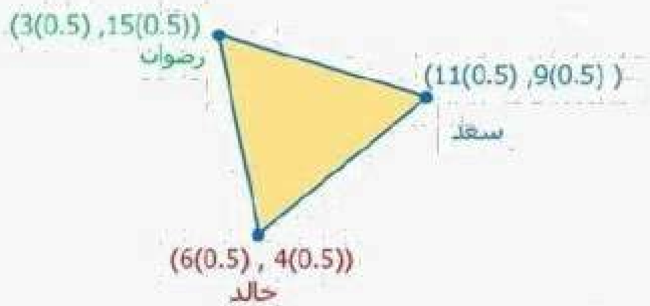
إرشادات للدراسة

مساحة المثلث

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحدّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.

الفصل الثانــى
٢-٤ المحــددات وقــاعـدة كـرامـر

تحقق من فهمك :-



3) يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها ، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: (11,9) , (6,4) , (3,15) ، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة 0.5km. فما مساحة المنطقة المثلثية التي يقفون عند رؤوسها؟

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5.5 & 4.5 & 1 \\ 1.5 & 7.5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 8.75 \ Km^2$$



الفصل الثاني
٢-٤ المحددات وقاعدة كرامر
Determinants and Cramer's Rule

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات**.

إرشادات للدراسة

المحدِّدات
تستعمل المحدِّدات لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحدِّدات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحدِّدة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًّا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحدِّدة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قاعدة كرامر

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.



الفصل الثانــي

٢-٤ المحــددات وقــاعــدة كــرامــر

Determinants and Cramer's Rule

مثال 4 حل نظام من معادلتين

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$5x - 6y = 15$$
$$3x + 4y = -29$$

احسب محدّدة مصفوفة المعاملات

$$|\underline{C}| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - (3)(-6) = 38$$

قاعدة كرامر

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$$

عوّض

$$= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38} \qquad = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38}$$

احسب المحدّدات

$$= \frac{5(-29) - 3(15)}{38} \qquad = \frac{15(4) - (-29)(-6)}{38}$$

اضرب

$$= \frac{-145 - 45}{38} \qquad = \frac{60 - 174}{38}$$

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محدّدة مصفوفة المعاملات $\underline{C}$ صفرًا، فإنه لا يكون للنظام حل وحيد.



الفصل الثانـي

٢-٤ المحـددات وقـاعـدة كـرامـر

Determinants and Cramer's Rule

$= -\frac{190}{38}$	اجمع واطرح	$= -\frac{114}{38}$
$= -5$	بسّط	$= -3$

حل النظام هو: $(-3, -5)$

تحقق:

$5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15$ $x = -3, y = -5$

$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$ بسّط

$15 = 15$ ✓

$3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29$ $x = -3, y = -5$

$-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$ بسّط

$-29 = -29$ ✓

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محدّدة مصفوفة المعاملات C صفرًا، فإنه لا يكون للنظام حل وحيد.

تحقق من فهمك :–

4) حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

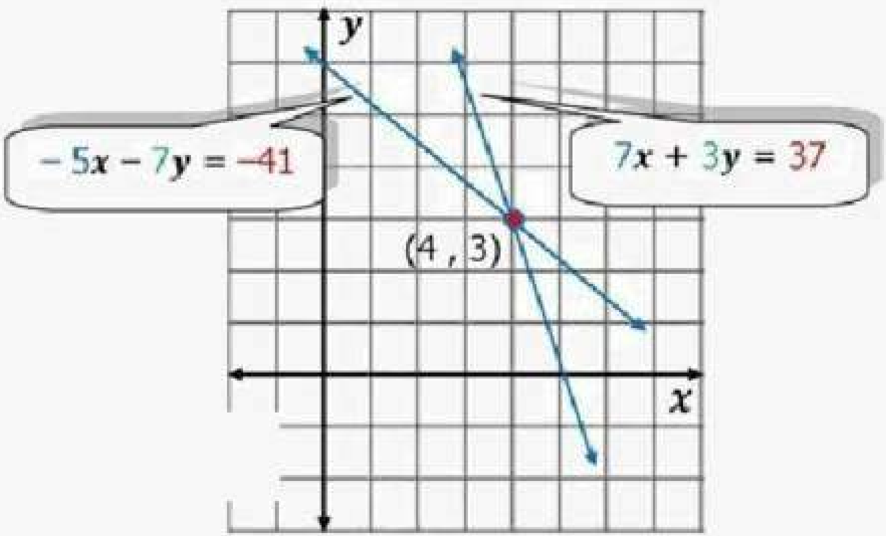
4A)

$$7x + 3y = 37$$
$$-5x - 7y = -41$$

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}$$
$$= 7(-7) - (-5)(3)$$
$$= -34 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{C} = \frac{\begin{vmatrix} 37 & 3 \\ -41 & -7 \end{vmatrix}}{-34} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{C} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 37 \\ -5 & -41 \end{vmatrix}}{-34} = 3$$



حل النظام هو : (4 , 3)

تحقق من فهمك :ـ

(4B

$$8x - 5y = 70$$
$$9x + 7y = 3$$

$$C = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 8(7) - (9)(-5)$$
$$= 101 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{C} = \frac{\begin{vmatrix} 70 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{101} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{C} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 70 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}}{101} = -6$$

حل النظام هو : (5 , -6)